DM n$^{\text{o}}$2 (non noté)

Pour la rentrée des vacances d'hiver 2025

Exercice

On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver, en fonction de I_3 et A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

   $$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A$$

   puis expliciter les coefficients de P_1 et P_2.

2. (a) Calculer les matrices P_1^2, P_1P_2, P_2P_1 et P_2^2.

   (b) En déduire : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

Problème

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs A_0, A_1, A_2, ... , A_n,... qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et la gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoi. Le tournoi continue même une fois qu'un gagnant est désigné.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

Partie 1 : Étude d'un cas particulier

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et que $p = q = \dfrac{1}{2}$

1. Donner la liste des gagnants possibles pour l'ensemble des trois premiers duels, puis vérifier que :

   $$\mathbb{P}(E_3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_1)$$

2. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n, démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(E_{n-1}) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(E_{n-2}) \qquad (\mathcal{R}_1)$$

3. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n)$

4. Que vaut $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Justifier. Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

Partie 2 : Étude du cas général

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0;1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1$$

5. Pour tout entier $k \in \{1, ..., N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ».

Justifier l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}\big(E_n | A_k^{(n)}\big) = \mathbb{P}(E_{n-k})$$

6. Établir que pour tout $n \geq N$, on a :

$$\mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}\mathbb{P}(E_{n-k}) \qquad (\mathcal{R}_2)$$

7. Calculer $\mathbb{P}(E_1), ..., \mathbb{P}(E_{N-1})$. En déduire que $\mathbb{P}(E_N) = 1 - q^{N-1}$

8. Soit $n \geq N$. Démontrer la relation :

$$\mathbb{P}(E_n) - \mathbb{P}(E_{n+1}) = pq^{N-1}\mathbb{P}(E_{n-N+1}) \qquad (\mathcal{R}_3)$$

9. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On note désormais r_N cette solution. Justifier que : $r_N > 1 \quad et \quad Q'(r_N) > 0$

10. À l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$, établir que :

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(E_n) \leq \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}$$

11. Établir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq1} \mathbb{P}(E_n)$, puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ sur tous les entiers $n \geq N$, donner la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)$.